Prof. Dr. Armin Iske
Dr. Andreas Vollmer
M.Sc. Lars Poppe

Fachbereich Mathematik
Universität Hamburg
Wintersemester 2022/23

Übungen zu Analysis 1

Aufgaben des Tages 20 — 12. Januar

Aufgabe 1: *(2 Punkte)* Für zwei nichtleere Mengen A und B sei $f : A \longrightarrow B$ eine Funktion. Dann ist die zugehörige *Graphenabbildung* $G_f : A \longrightarrow A \times B$ definiert durch

$$G_f(x) := (x, f(x)) \qquad \text{für } x \in A.$$

Zeige, dass G_f injektiv ist. Zeige weiterhin, dass f genau dann surjektiv ist, falls

$$P(G_f(A)) = B,$$

wobei $P : A \times B \longrightarrow B$ die *Projektion* von $A \times B$ auf B bezeichnet, d.h. es gilt $P(x, y) = y$ für alle $(x, y) \in A \times B$.

Aufgabe 2: *(2+3 Punkte)* Für $n \in \mathbb{N}_0$ und Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sei $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$p(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \text{für } x \in \mathbb{R},$$

ein Polynom vom Grad n, so dass insbesondere $a_n \neq 0$.

(a) Zeige, dass p genau dann gerade ist, wenn $a_k = 0$ für alle ungeraden Indizes k.
Zeige, dass p genau dann ungerade ist, wenn $a_k = 0$ für alle geraden Indizes k.

(b) Angenommen, alle Koeffizienten von p seien ganzzahlig, d.h. $a_k \in \mathbb{Z}$ für alle $k = 0, \ldots, n$. Für $a, b \in \mathbb{N}$ sei weiterhin $\alpha = a/b \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von p, d.h. $p(\alpha) = 0$.
Beweise: Falls a und b *teilerfremd* sind, dann gelten $a_0/a \in \mathbb{Z}$ und $a_n/b \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 3: *(3 Punkte)* Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, die die Funktionalgleichung

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

erfülle. Zeige, dass ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass f auf den rationalen Zahlen durch

$$f(x) = ax \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{Q}$$

eindeutig bestimmt ist.

Hinweis: Bestimme f zuerst auf den natürlichen Zahlen und auf der Null.

Ausgabedatum: 12. Januar 2022 **Abgabetermin:** 16. Januar 2022, 10:00 Uhr.